ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ЗА УПИС НА МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Београд, 26.06.2024.

Време за рад је 180 минута.

1. Ако је $A = \sum_{n=1}^{2024} \frac{1}{n(n+1)}$, $B = \sin\frac{\pi}{6}$, $C = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{4}$ и $D = \sum_{n=1}^{2024} \frac{1}{2^n}$, онда је:

(A) $B < A < D < C$; **(B)** $B < D < A < C$; **(C)** $A < D < B < C$; **(D)** $C < B < A < D$; **(E)** ниједан од понуђених одговора; **(N)** не знам.

2. Ако је $a \in (-1, 0)$, онда је $\frac{\sqrt{|a-1|}}{2(a-1)} \cdot \left(\sqrt{2 - 2\sqrt{a+1} + a} + \sqrt{2 + 2\sqrt{a+1} + a}\right)$ једнако:

(A) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$; **(B)** $-\frac{1}{2\sqrt{1-a}}$; **(C)** $-\frac{1}{\sqrt{1-a}}$; **(D)** $-\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}$; **(E)** $\frac{1}{\sqrt{a-1}}$; **(N)** не знам.

3. Параметара $a \in \mathbb{R}$ за које систем једначина $x^2 - y^2 = x + y$, $x + ay = 1$, има тачно једно решење у скупу реалних бројева има:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3; **(E)** бесконачно много; **(N)** не знам.

4. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$, а x_1 и x_2 нуле квадратне функције $f(x) = x^2 + ax + b$. Ако је $f(2) = 4$ и $2x_1x_2 + x_1 + x_2 = -5$, онда је $a - b$ једнако:

(A) -3; **(B)** 1; **(C)** $\frac{5}{4}$; **(D)** 3; **(E)** 5; **(N)** не знам.

5. Збир свих $p \in \mathbb{R}$ за које једначина $x^2 + px - 7 = 0$ има решења чија је апсолутна вредност разлике једнака 8 је:

(A) 7; **(B)** -7; **(C)** 1; **(D)** 6; **(E)** 0; **(N)** не знам.

6. Скуп решења неједначине $\sqrt{(x-1)(x-2)(x+1)} > x - 2$ је:

(A) $[-1, 1] \cup (2, \infty)$; **(B)** $[-1, 1] \cup [2, \infty)$; **(C)** $[-1, 1]$; **(D)** $(2, \infty)$; **(E)** $[2, \infty)$; **(N)** не знам.

7. Скуп решења неједначине $(4x^2 - 10x + 7)^{x^2 - x} > 1$ је:

(A) $(-\infty, 0) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$; **(B)** $(-\infty, 1) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$; **(C)** $(1, \frac{3}{2})$; **(D)** $(0, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$; **(E)** $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$; **(N)** не знам.

8. Производ решења једначине $x^{(\log_3 x)^2 + \log_3 x^2} = 9x$ је:

(A) $\frac{1}{27}$; **(B)** $\frac{1}{9}$; **(C)** $\frac{1}{3}$; **(D)** 1; **(E)** 3; **(N)** не знам.

9. Трапез $ABCD$, чије су основице AB и CD, при чему је $AB > CD$, уписан је у круг полупречника 1. Ако је $AC = \sqrt{3}$ и $BC = 1$, онда је површина тог трапеза:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **(B)** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; **(C)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; **(D)** $\frac{3}{2}$; **(E)** ниједан од понуђених одговора; **(N)** не знам.

10. Збир решења једначине $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1)\sin x + \sqrt{3} = 0$ на интервалу $(0, 2\pi)$ је:

(A) 0; **(B)** $\frac{\pi}{2}$; **(C)** π; **(D)** $\frac{3\pi}{2}$; **(E)** 2π; **(N)** не знам.

11. Ако је $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ такво да важи $\sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha = 1$, онда је $\cos\alpha$ једнак:

(A) $-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; **(B)** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$; **(C)** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; **(D)** $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; **(E)** $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; **(N)** не знам.

12. У праву кружну купу уписан је прав ваљак највеће могуће запремине. Однос висина ваљка и купе припада интервалу:

(A) $\left(0, \frac{1}{5}\right)$; **(B)** $\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$; **(C)** $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$; **(D)** $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$; **(E)** $\left(\frac{4}{5}, 1\right)$; **(N)** не знам.

13. Производ свих реалних бројева c за које је права $y = -x + c$ тангента елипсе $\frac{x^2}{20} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$ једнак је:

(A) -30; **(B)** -24; **(C)** -20; **(D)** -18; **(E)** -12; **(N)** не знам.

14. Збир трећег и седмог члана опадајућег аритметичког низа је 6, а њихов производ је 8. Збир првих 12 чланова тог низа је:

(A) 15; **(B)** 20; **(C)** 27; **(D)** 33; **(E)** 45; **(N)** не знам.

15. Троцифрених бројева чији је збир квадрата цифара дељив са 3 има:

(A) 48; **(B)** 102; **(C)** 216; **(D)** 264; **(E)** 300; **(N)** не знам.

16. Нека је z комплексан број који припада другом квадранту и за који важи $\mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{2-i}\right) = 1$ и $\mathrm{Re}(z^2+1) = 1$. Онда је z^{24} једнако:

(A) 2^{12}; **(B)** $2^{12}(1+i)$; **(C)** $3^{24}2^{12}i$; **(D)** $3^{12}2^{24}$; **(E)** $3^{24}2^{12}$; **(N)** не знам.

17. Ако је $1 + i\sqrt{3}$ нула полинома $x^3 + ax^2 + 2x + b$, где су $a, b \in \mathbb{R}$, онда је реална нула тог полинома:

(A) -2; **(B)** -1; **(C)** 1; **(D)** 2; **(E)** 4; **(N)** не знам.

18. Нека су $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функције за које важи $f(x-2) = 3x - 1$ и $g(2x+1) = 4x + 1$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Ако је $(f \circ g)(a) = 2024$, онда је a једнако:

(A) 118; **(B)** $\frac{337}{2}$; **(C)** 336; **(D)** $\frac{1009}{3}$; **(E)** 337; **(N)** не знам.

19. Број бијекција скупа $\{1, 2, \ldots, 2024\}$ у себе, којима се сваки паран број слика у себе, је:

(A) $2024!$; **(B)** $2 \cdot 1012!$; **(C)** $1012!$; **(D)** 2^{1012}; **(E)** ниједан од понуђених одговора; **(N)** не знам.

20. Ако су коефицијенти полинома $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^n$ уз x^{2024} и x^{2025} једнаки, при чему је $n \geqslant 2025$, онда је n једнак:

(A) 4048; **(B)** 4050; **(C)** 6073; **(D)** 6074; **(E)** 6075; **(N)** не знам.

Решења задатака.

1. Важи $A=\sum\limits_{n=1}^{2024}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2025}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ и $D=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{2024}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{2024}}$. Како је $\frac{1}{2}>\frac{1}{2025}>\frac{1}{2^{2024}}$ и $C>1$, следи $B<A<D<C$.

2. Како је $a\in(-1,0)$, важи $a-1=-\left(\sqrt{1-a}\right)^2$ и $1-\sqrt{a+1}>0$, па је $\frac{\sqrt{|a-1|}}{2(a-1)}\cdot\left(\sqrt{2-2\sqrt{a+1}+a}+\sqrt{2+2\sqrt{a+1}+a}\right)=-\frac{\sqrt{1-a}}{2(\sqrt{1-a})^2}\cdot\left(\sqrt{(\sqrt{a+1}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{a+1}+1)^2}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{1-a}}\cdot\left(|\sqrt{a+1}-1|+|\sqrt{a+1}+1|\right)=-\frac{1}{2\sqrt{1-a}}\cdot\left(1-\sqrt{a+1}+\sqrt{a+1}+1\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

3. Наведени систем је еквивалентан са $x=1-ay$, $(x+y)(x-y-1)=0$, тј. са $x=1-ay$, $(1-ay+y)(1-ay-y-1)=(a+1)y\big((a-1)y-1\big)=0$, те сваком решењу y друге једначине последњег система одговара решење $(1-ay,y)$ полазног система. Ако је $a=-1$, та једначина има бесконачно много решења (свако $y\in\mathbb{R}$), ако је $a\notin\{-1,1\}$, има два решења ($y=0$ и $y=\frac{1}{a-1}$), а ако је $a=1$, има јединствено решење ($y=0$).

4. Из $f(2)=4$ следи $4+2a+b=4$, тј. $2a+b=0$. Како је $x_1+x_2=-a$ и $x_1x_2=b$, на основу Виетових правила, важи $2b-a=2x_1x_2+x_1+x_2=-5$. Следи $a=1$, $b=-2$, па је $a-b=3$.

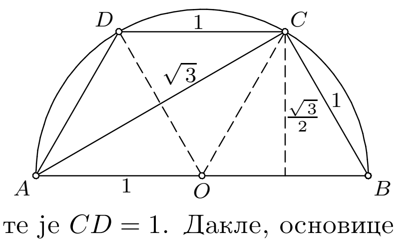
5. За свако p важи $p^2-4\cdot1\cdot(-7)=p^2+28>0$, па уочена квадратна једначина има два реална решења, $\frac{-p+\sqrt{p^2+28}}{2}$ и $\frac{-p-\sqrt{p^2+28}}{2}$, а апсолутна вредност њихове разлике је $\sqrt{p^2+28}=8$, одакле следи $p\in\{-6,6\}$.

6. Неједначина је дефинисана за $x\in[-1,1]\cup[2,\infty)$. Ако је $x\in[-1,1]$, тривијално је испуњена (лева страна је ненегативна, а десна негативна). Ако је $x\in[2,\infty)$, њене стране су ненегативне, па је еквивалентна са $(x-1)(x-2)(x+1)>(x-2)^2$, тј. са $(x-2)((x^2-1)-(x-2))=(x-2)(x^2-x+1)>0$, а како је $x^2-x+1>0$ за свако $x\in\mathbb{R}$, следи да је њено решење у овом случају $x\in(2,\infty)$. Дакле, решење наведене неједначине је $x\in[-1,1]\cup(2,\infty)$.

7. Како је $4x^2-10x+7>0$ (важи $(-10)^2-4\cdot4\cdot7<0$), наведена неједначина је дефинисана за $x\in\mathbb{R}$. Ако је $4x^2-10x+7>1$, тј. $4x^2-10x+6=2(x-1)(2x-3)>0$, односно $x\in(-\infty,1)\cup(\frac{3}{2},\infty)$, еквивалентна је са $x^2-x=x(x-1)>0$, тј. $x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$, па је скуп њених решења $x\in(-\infty,0)\cup(\frac{3}{2},\infty)$. Ако је $4x^2-10x+7=1$, тј. $x\in\{1,\frac{3}{2}\}$, своди се на $1>1$, па нема решења. Ако је $4x^2-10x+7<1$, тј. $x\in(1,\frac{3}{2})$, еквивалентна је са $x^2-x=x(x-1)<0$, тј. са $x\in(0,1)$, па нема решења. Дакле, скуп решења уочене неједначине је $x\in(-\infty,0)\cup(\frac{3}{2},\infty)$.

8. Једначина је дефинисана за $x\in(0,\infty)$ и на том скупу еквивалентна са $((\log_3 x)^2+2\log_3 x)\log_3 x=\log_3 9+\log_3 x=2+\log_3 x$, односно са $(t^2+2t)t=2+t$, где је $t=\log_3 x$. Следи $t^3+2t^2-t-2=(t+2)(t+1)(t-1)=0$, па је $t\in\{-2,-1,1\}$, односно $x\in\{\frac{1}{9},\frac{1}{3},3\}$ (и производ решења је $\frac{1}{9}$).

9. Како су $AC=\sqrt{3}$ и $BC=1$ тетиве у кругу полупречника $R=1$, чији је центар O, њима одговарају централни углови $2\arcsin\frac{AC}{2R}=2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}$ и $2\arcsin\frac{BC}{2R}=2\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, редом. Као одговарајући периферијски углови над тетивама AC и BC, а како се A и O налазе у истој полуравни одређеној правом BC, односно B и O налазе у истој полуравни одређеној правом AC (пошто је AB дужа основица уоченог трапеза), следи $\sphericalangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ и $\sphericalangle CAB=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$, те је $\sphericalangle BCA=\pi-\sphericalangle CAB-\sphericalangle ABC=\frac{\pi}{2}$, тј. $\triangle ABC$ је правоугли, па је $AB^2=AC^2+BC^2=4=2^2$. Како је трапез $ABCD$ тетиван, он је једнакокрак, па је централни угао који одговара тетиви DA једнак $\frac{\pi}{3}$, а како C и D припадају истом луку описаног круга чији су крајеви A и B, тетиви CD одговара централни угао $\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$, те је $CD=1$. Дакле, основице уоченог трапеза су $AB=2$ и $CD=1$, а одговарајућа висина је једнака висини која одговара хипотенузи у $\triangle ABC$, тј. дужине је $\frac{\sqrt{3}}{2}$, па је његова површина једнака $\frac{2+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.



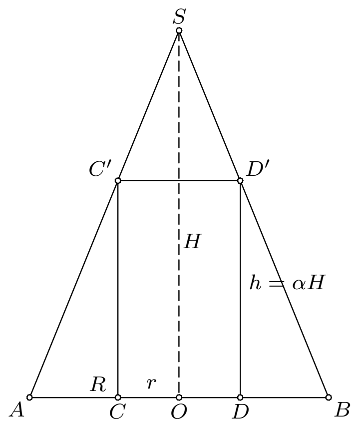
10. Уочена једначина је еквивалентна са $(2\sin x-1)(2\sin x-\sqrt{3})=0$, па је $\sin x\in\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Ако је $\sin x=\frac{1}{2}$, онда је $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$ или $x=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$, за $n\in\mathbb{Z}$, а ако је $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, онда је $x=\frac{\pi}{3}+2n\pi$ или $x=\frac{2\pi}{3}+2n\pi$, за $n\in\mathbb{Z}$. Интервалу $(0,2\pi)$ припадају $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{2\pi}{3}$, а њихов збир је 2π.

11. Наведени услов је еквивалентан са $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}$, тј. са $\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$, па је $\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2n\pi$ или $\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$, где је $n\in\mathbb{Z}$, односно $\alpha=-\frac{\pi}{12}+2n\pi$ или

$\alpha = \frac{7\pi}{12} + 2n\pi$, где је $n \in \mathbb{Z}$. Како је $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, следи $\alpha = \frac{7\pi}{12}$. Како $\frac{7\pi}{12} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ и $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, следи $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{7\pi}{6}}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}} = -\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{8}} = -\frac{|1-\sqrt{3}|}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Друго решење. Како је $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, важи $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, па је $\sqrt{2(1-\cos^2\alpha)} = 1 - \sqrt{2}\cos\alpha$, одакле је $2(1-\cos^2\alpha) = 1 - 2\sqrt{2}\cos\alpha + 2\cos^2\alpha$, тј. $4\cos^2\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha - 1 = 0$, па је $\cos\alpha \in \{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\}$. Како је $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, важи $|\cos\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, а пошто је $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, следи $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

12. Пресек купе и равни која садржи пречник основе купе AB и њен врх S је једнакокраки троугао, основице $AB = 2R$ и висине која одговара основици $SO = H$, где су R и H, редом, полупречник основе и висина купе. Пресек те равни и ваљка уписаног у купу је правоугаоник $CDD'C'$, при чему је $A-C-D-B$, а $CC' \perp AB$ и $DD' \perp AB$, где C', D' припадају крацима $\triangle ABS$, и важи $CD = 2CO = 2r$, $CC' = DD' = h$, где су r и h, редом, полупречник основе и висина ваљка. Ако је $\alpha = \frac{h}{H}$ (јасно, важи $\alpha \in (0,1)$), како је $\triangle SAO \sim \triangle C'AC$, следи $AC = \alpha R$, те је $r = CO = AO - AC = (1-\alpha)AO = (1-\alpha)R$. Запремина те купе је $V_K = \frac{R^2\pi H}{3}$, а тог ваљка је $r^2\pi h = R^2\pi H \cdot \alpha(1-\alpha)^2 = 3V_K \cdot \alpha(1-\alpha)^2$, па се ваљак највеће запремине добија за α које је максимум функције $f(\alpha) = \alpha(1-\alpha)^2$ на $(0,1)$. Како је f диференцијабилна на $(0,1)$ и важи $f'(\alpha) = 1 - 4\alpha + 3\alpha^2 = (1-\alpha)(1-3\alpha)$, следи да f расте на $(0, \frac{1}{3})$, а опада на $(\frac{1}{3}, 1)$, те максимум достиже за $\alpha = \frac{1}{3} \in \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$.



13. Тангента наведене елипсе у њеној тачки (x_0, y_0) је $\frac{xx_0}{20} + \frac{(y-1)(y_0-1)}{5} = 1$, па ако је коефицијент правца те тангенте једнак -1, следи $-\frac{\frac{x_0}{20}}{\frac{y_0-1}{5}} = -\frac{x_0}{4(y_0-1)} = -1$, тј. $y_0 - 1 = \frac{x_0}{4}$. Како је и $\frac{x_0^2}{20} + \frac{(y_0-1)^2}{5} = 1$, следи $\frac{x_0^2}{20} + \frac{x_0^2}{80} = 1$, тј. $x_0 \in \{-4, 4\}$, одакле следи да су тачке додира $(-4, 0)$ и $(4, 2)$. Дакле, постоје две такве тангенте, $y = -x - 4$ и $y = -x + 6$ (односно, могуће вредности c су -4 и 6, а производ тих вредности је -24).

Друго решење. Права $y = -x + c$ је тангента елипсе $\frac{x^2}{20} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$ ако и само ако систем који се састоји од наведене две једначине има тачно једно решење, тј. ако и само ако (квадратна) једначина $\frac{x^2}{20} + \frac{(-x+c-1)^2}{5} = 1$, односно $5x^2 - 8(c-1)x + (4(c-1)^2 - 20) = 0$ има тачно једно решење, што је испуњено ако и само ако је $(8(c-1))^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4(c^2 - 2c - 4) = 16(-c^2 + 2c + 24) = -16(c+4)(c-6) = 0$, односно $c \in \{-4, 6\}$.

14. Ако је a први члан уоченог аритметичког низа, а d његов корак, онда је његов трећи члан $a + 2d$, а седми $a + 6d$, па је $(a+2d) + (a+6d) = 6$ и $(a+2d)(a+6d) = 8$, односно $a = 3 - 4d$ и $(3 - 4d + 2d)(3 - 4d + 6d) = (3-2d)(3+2d) = 9 - 4d^2 = 8$, одакле је $d^2 = \frac{1}{4}$. Како је у питању опадајући низ, следи $d = -\frac{1}{2}$, па је збир његових првих 12 чланова $12a + \frac{11 \cdot 12}{2} \cdot d = 27$.

15. Квадрат природног броја при дељењу са 3 даје или остатак 0 (ако и само ако је дељив са 3) или остатак 1 (ако и само ако није дељив са 3). Следи да су цифре троцифреног броја коме је збир квадрата цифара дељив са 3 или све дељиве са 3 или није ниједна. У првом случају таквих бројева има $3 \cdot 4 \cdot 4$ (прва цифра може бити било која из скупа $\{3, 6, 9\}$, преостале 2 било која из скупа $\{0, 3, 6, 9\}$, а притом је избор сваке цифре независан од избора преосталих), а у другом $6 \cdot 6 \cdot 6$ (свака цифра је произвољна из скупа $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ и притом је избор сваке цифре независан од избора преосталих), те бројева са наведеним својствима има $3 \cdot 4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \cdot 6 = 264$.

16. Ако је $z = a + ib$, где су $a, b \in \mathbb{R}$, пошто z припада другом квадранту, важи $a \leqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Како је $\frac{z+2}{2-i} = \frac{(a+2+ib)(2+i)}{5} = \frac{(2a-b+4)+i(a+2b+2)}{5}$, важи $\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{2-i}\right) = \frac{a+2b+2}{5} = 1$, а како је $z^2 + 1 = (a^2 - b^2 + 1) + 2iab$, важи $\operatorname{Re}(z^2+1) = a^2 - b^2 + 1 = 1$. Следи $a + 2b = 3$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 0$. Како је $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$, а, због $a + 2b = 3$, не може бити $a = b = 0$, следи $a \neq b$, па је $a = -b$, тј. важи $a = -3$, $b = 3$, односно $z = -3 + 3i = 3(-1+i)$. Следи $z^2 = 3^2 \cdot (-2i)$, па је $z^{24} = 3^{24} \cdot 2^{12} \cdot (-i)^{12} = 3^{24} \cdot 2^{12}$.

17. Важи $(1 + i\sqrt{3})^3 + a(1 + i\sqrt{3})^2 + 2(1 + i\sqrt{3}) + b = (-8) + a(-2 + 2i\sqrt{3}) + 2(1 + i\sqrt{3}) + b = (-6 - 2a + b) + 2i\sqrt{3}(a+1) = 0$, па како су $a, b \in \mathbb{R}$, следи $-6 - 2a + b = a + 1 = 0$, тј. $a = -1$, $b = 4$. Дакле, наведени полином је $x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x^2 - 2x + 4)(x + 1)$, тј. његова реална нула је -1.

18. Функција $x-2$ је бијекција (из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$), па ако је $t=x-2$, следи $f(t)=3(t+2)-1=3t+5$, за $t\in\mathbb{R}$. Аналогно, функција $2x+1$ је бијекција (из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$), па ако је $t=2x+1$, следи $g(t)=4\cdot\frac{t-1}{2}+1=2t-1$, за $t\in\mathbb{R}$. Из добијеног је $(f\circ g)(a)=f(2a-1)=3(2a-1)+5=6a+2$, па ако је $(f\circ g)(a)=6a+2=2024$, следи $a=337$.

19. Свака таква бијекција је једнозначно одређена произвољном бијекцијом на подскупу непарних бројева уоченог скупа, па је тражени број једнак броју пермутација непарних елемената тог скупа, односно $1012!$.

20. Како је $n\geqslant 2025$, коефицијенти уз x^{2024} и x^{2025} су различити од 0. Коефицијент уз x^{2024} је једнак $\binom{n}{2024}\cdot 1^{n-2024}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2024}=\binom{n}{2024}\cdot\frac{1}{2^{2024}}$, а коефицијент уз x^{2025} је једнак $\binom{n}{2025}\cdot 1^{n-2025}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2025}=\binom{n}{2025}\cdot\frac{1}{2^{2025}}$. Следи $\binom{n}{2025}\cdot\frac{1}{2^{2025}}=\binom{n}{2024}\cdot\frac{1}{2^{2024}}$, тј. $\frac{n!}{2025!\cdot(n-2025)!}=2\cdot\frac{n!}{2024!\cdot(n-2024)!}$, одакле је $\frac{1}{2025}=\frac{2}{n-2024}$, односно $n=6074$.